Проблемы физики, математики и техники, № 2 (23), 2015

УДК 512.542

ОБ $\mathfrak{F}$-ДОСТИЖИМЫХ ПОДГРУППАХ В ГРУППАХ С ОПЕРАТОРАМИ

Р.В. Бородич, М.В. Селькин, Е.Н. Бородич

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь

ON $\mathfrak{F}$-ACCESSIBLE SUBGROUPS IN GROUPS WITH OPERATORS

R.V. Borodich, M.V. Selkin, E.N. Borodich

F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus

В работе изучается поведение $\mathfrak{F}$-достижимых подгрупп в обобщенно фраттиниевых расширениях.

Ключевые слова: *максимальная подгруппа, формация, $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа, группа операторов.*

The behavior of $\mathfrak{F}$-accessible subgroups in generalized Frattini extension is studied.

Keywords: *maximal subgroup, formation, $\mathfrak{F}$-accessible subgroups, group of operators.*

Введение

Все рассматриваемые группы конечны. Исследование пересечений максимальных подгрупп относится к одному из классических направлений теории конечных групп. Начало этой теории восходит к работе Фраттини [1] 1885 года. Полученные им результаты в дальнейшем развивались в работах таких авторов, как Л.А. Шеметков [2], М.В. Селькин [3], А. Баллестер-Болинше [4], Д. Бейдлеман и Ш. Смит [5] и многих других (см. монографии [2], [3]).

В работе Д. Бейдлемана и Ш. Смита [5] был поставлен следующий вопрос: «Если H субнормальная подгруппа группы G, содержащая $\Phi(G)$, то будет ли из сверхразрешимости $H/\Phi(G)$ следовать сверхразрешимость подгруппы H ?» Эта задача рассматривалась в работах многих авторов (см. монографию [3]). В данной работе даётся ответ на более общий вопрос: «Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация, H – $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа, в каком случае из $H/\Phi(G,A)\in\mathfrak{F}$ будет следовать, что $H\in\mathfrak{F}$?»

1 Определения и обозначения

Подгруппа H группы G называется пронормальной, если для любого $x\in G$ подгруппы H и H^x сопряжены между собой в $<H,H^x>$.

Напомним, что классом групп называют всякое множество групп, содержащее вместе с каждой своей группой G и все группы, изоморфные G.

Класс групп называют наследственным, если вместе с каждой своей группой G он содержит все подгруппы группы G.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется формацией, если выполняются следующие условия:

1) если $G\in\mathfrak{F}$ и $N\lhd G$, то $G/N\in\mathfrak{F}$;

2) если $G/N_1\in\mathfrak{F}$ и $G/N_2\in\mathfrak{F}$, то $G/N_1\cap N_2\in\mathfrak{F}$.

Отображение f класса G всех групп в множество классов групп называют экраном, если для любой группы G выполняются следующие условия:

1) $f(G)$ – формация;

2) $f(G)\subseteq f(G^{\varphi})\cap f(Ker\varphi)$ для любого гомоморфизма φ группы G;

3) $f(1)=G$.

Экран f называют локальным, если для любого простого числа p он принимает одинаковые значения на всех неединичных p-группах и $f(G)=\bigcap_{p\in\pi(G)} f(p)$ для любой группы G.

Формацию $\mathfrak{F}$ называют локальной, если она имеет хотя бы один локальный экран.

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация. Тогда подгруппа H конечной группы G называется $\mathfrak{F}$ – достижимой, если имеется такая цепь подгрупп

$$H=H_0\subseteq H_1\subseteq\ldots\subseteq H_n=G,$$

что для каждого $i=1,2,\ldots,n$ выполняется одно из условий: 1) подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i; 2) $\mathfrak{F}$-корадикал подгруппы H_i содержится в H_{i-1}. Если выполняется только условие 2), то такую подгруппу называют $\mathfrak{F}$-субнормальной.

Понятие $\mathfrak{F}$-достижимой подгруппы, введённое О. Кегелем в работе [6], позволило систематизировать многие закономерности, связанные с нормальными и субнормальными подгруппами, а также их обобщениями. В данной работе идея $\mathfrak{F}$-достижимой подгруппы используется для исследования поведения нормальных и обобщённо субнормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп во фраттиниевых расширениях конечных групп.

Через M_G обозначают ядро подгруппы M в группе G (то есть пересечение всех подгрупп из G, сопряженных с подгруппой M).

Пусть даны группа G, множество A и отображение $f: A \mapsto End(G)$, где $End(G)$ – множество всех эндоморфизм группы G. Подгруппа M называется A-допустимой, если M выдерживает действие всех операторов из A, то есть $M^\alpha \subseteq M$ для любого оператора $\alpha \in A$.

Несложно заметить, что так как операторы действуют как соответствующие им эндоморфизмы, то каждая характеристическая подгруппа является A-допустимой для произвольной группы операторов.

Обозначим через $\Phi(G, A)$ пересечение ядер всех максимальных A-допустимых подгрупп.

Пусть $\mathfrak{I}$ – формация. Через $D^{\mathfrak{I}}(G, A)$ обозначим подгруппу, равную пересечению ядер всех максимальных A-допустимых подгрупп группы G, не содержащих $\mathfrak{I}$-корадикал группы G.

В случае, когда группа операторов A единична, то подгруппы $\Phi(G, A)$ и $D^{\mathfrak{I}}(G, A)$ совпадают соответственно с $\Phi(G)$ (подгруппа Фраттини) и $\Delta^{\mathfrak{I}}(G)$ (подгруппа, равная пересечению всех $\mathfrak{I}$-абнормальных максимальных подгрупп группы G). Свойства подгруппы $\Delta^{\mathfrak{I}}(G)$, а также её влияние на строение группы для различных классов групп $\mathfrak{I}$ достаточно хорошо изучены [3].

В случае отсутствия в группе G указанных подгрупп будем полагать, что соответствующие пересечения совпадают с самой группой G.

Необходимо отметить, что не каждая максимальная подгруппа будет являться максимальной A-допустимой относительно некоторой группы операторов A, а также не всякая максимальная A-допустимая подгруппа группы является максимальной подгруппой в этой же группе.

***Пример* 1.1.** *Пусть Q – группа кватернионов 8-го порядка. Рассмотрим $G=[Q]Z_3$, Z_3 – группа операторов для Q. В группе Q подгруппа K порядка 2 является максимальной допустимой относительно группы операторов Z_3, но не является максимальной подгруппой группы Q.*

***Пример* 1.2.** *Рассмотрим группу*

$$G^* = < a, b, c \mid a^2 = b^3 = c^3 = 1, bc = cb, b^a = c > .$$

Тогда $G^* = [G]A$, где $G = < b > \times < c >$ и $A = < a >$ – группа операторов группы G. Простая проверка показывает, что в группе G есть максимальная A-допустимая подгруппа $H = < bc >$ порядка 3, но не все подгруппы порядка 3, например $< b >$, являются A-допустимыми.

Пусть $\Phi(G, A) \neq G$. Определим подгруппу $\widetilde{F}(G, A)$ группы G следующими двумя условиями:

1) $\widetilde{F}(G, A) \supseteq \Phi(G, A)$;

2) $\widetilde{F}(G, A) / \Phi(G, A) = Soc(G / \Phi(G, A))$.

На подгруппу $\widetilde{F}(G, A)$ можно смотреть как на обобщение подгруппы Фиттинга $F(G)$, тем более, что она сохраняет основное свойство подгруппы Фиттинга разрешимой группы – содержать свой централизатор.

2 Вспомогательные результаты

В дальнейшем нам понадобятся следующие результаты об $\mathfrak{I}$-достижимых подгруппах.

***Лемма* 2.1** [3]. *Пусть $\mathfrak{I}$ – непустая наследственная формация, H, K и N – подгруппы группы G, причем подгруппа N нормальна в G. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если H – $\mathfrak{I}$-достижимая подгруппа группы G, то $H \cap K$ – $\mathfrak{I}$-достижимая подгруппа группы K, а HN / N – $\mathfrak{I}$-достижимая подгруппа группы G / N;*

2) *если $H \supseteq N$, то подгруппа H $\mathfrak{I}$-достижима в G тогда и только тогда, когда подгруппа H / N $\mathfrak{I}$-достижима в G / N;*

3) *если H – $\mathfrak{I}$-достижимая подгруппа группы G, то $H^{\mathfrak{I}}$ – субнормальная подгруппа группыG.*

***Лемма* 2.2.** *Пусть группа G имеет группу операторов A. Тогда $\Phi(G) \subseteq \Phi(G, A)$.*

Доказательство. Предположим, что

$$\Phi(G) \subset \Phi(G, A).$$

Тогда существует максимальная A-допустимая подгруппа M, такая, что $\Phi(G) \not\subset M$. Так как $\Phi(G)$ является характеристической подгруппой, то $\Phi(G)$ A-допустима. Так как произведение A-допустимых подгрупп является A-допустимым, то $M\Phi(G) = G$. Учитывая, что $\Phi(G)$ состоит из необразующих элементов, получаем, что $M = G$. Полученное противоречие доказывает лемму.

***Лемма* 2.3.** *Пусть группа G имеет группу операторов A, такую, что $(|G|, |A|) = 1$, $K \subseteq N \lhd G$, $K \lhd G$ и $K \subseteq \Phi(G, A)$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если N / K π-замкнута, то и N π-замкнута*;

2) $F_p(N / K) = F_p(N) / K$.

Доказательство. Пусть N / K имеет нормальную S_π-подгруппу H / K. Так как $K \subseteq \Phi(G, A)$, то K нильпотентна. Нетрудно заметить, что $S_{\pi'}$-подгруппа R из K является $S_{\pi'}$-подгруппой в H. По теореме Шура-Цассенхауза H содержит S_π-подгруппу S и любые две такие подгруппы сопряжены в H. По лемме Фраттини $G = N_G(S)H$. С учётом того, что $H = SR$, получаем, что $G = N_G(S)R$. Так как S

есть S_π-подгруппа в N, а подгруппа N A-допустима, то S A-допустима. Тогда подгруппа $N_G(S)$ A-допустима и на основании леммы 17.1 из [2] является абнормальной подгруппой группы G. Следовательно, $N_G(S)$ содержится в некоторой абнормальной максимальной A-допустимой подгруппе M из G. Поэтому $G = MR$. Так как $R \subseteq \Phi(G, A) \subseteq M$, то $G = M$. Получили противоречие. Следовательно, S нормальна в G.

Второе утверждение леммы является следствием первого при $\pi = p'$. Лемма доказана.

3 Основной результат

***Теорема* 3.1.** *Пусть группа G имеет группу операторов A, такую, что $(|G|,|A|) = 1$, $\Im$ – локальная формация, $\pi = \pi(\Im)$. Если субнормальная подгруппа H группы G содержит $O_\pi(\Phi(G, A))$ и $H / O_\pi(\Phi(G, A)) \in \Im$, то $H \in \Im$.*

Доказательство. Согласно теореме 4.3 гл. IV [6] $\Im$ содержится в E_π классе всех π-групп. Не ограничивая общности, можно считать, что $\Phi(G, A)$ – π-группа. Таким образом, H – π-группа и $H / \Phi(G, A) \in \Im$. Так как H – субнормальная подгруппа группы G и согласно леммы 2.3 $F_p(G / \Phi(G, A)) = F_p(G) / \Phi(G, A)$, получаем, что

$$F_p(H / \Phi(G, A)) = F_p(H) / \Phi(G, A).$$

Так как $H / \Phi(G, A) \in \Im$, то, используя лемму 2.3 и лемму 4.5 из [2], получаем, что

$$(H / \Phi(G, A)) / F_p(H / \Phi(G, A)) =$$
$$= H / \Phi(G, A) / F_p(H) / \Phi(G, A)$$
$$H / F_p(H) \in f(p).$$

Так как последнее справедливо для любого $p \in \pi(H)$, то по лемме 4.5 из [2] подгруппа H входит в $\Im$. Теорема доказана.

В случае, когда $\Im$ содержит формацию нильпотентных групп, тогда $\pi = P$ и теорема 3.1 дает ответ на вопрос: «Если H субнормальная подгруппа группы G, такая, что $H / \Phi(G, A) \in \Im$, то $H \in \Im$».

Если группа операторов A единична, то подгруппа $\Phi(G, A)$ совпадает с подгруппой Фраттини $\Phi(G)$ и из теоремы 3.1 получаем результат работы [4].

Замечание. *Если локальная формация $\Im$ не содержит формацию нильпотентных групп, то даже в случае единичной группы операторов из того, что $H / \Phi(G) \in \Im$ для субнормальной подгруппы H, не всегда следует, что $H \in \Im$. Действительно, пусть $\Im$ – насыщенная формация всех p-групп, p – простое число. Рассмотрим $q \neq p$ и пусть $G = C_{p^2} \times C_{q^2}$ – циклическая группа порядка $p^2 q^2$. Если $H = C_{p^2}\Phi(G)$, тогда $H \lhd G$ и $H / \Phi(G) \in \Im$, но $H \notin \Im$.*

***Теорема* 3.2.** *Пусть группа G имеет группу операторов A, такую, что $(|G|,|A|) = 1$, $\Im$ – локальная формация. Если N – субнормальная подгруппа группы G и $N / N \cap \Phi(G, A) \in \Im$. Тогда N представима в виде прямого произведения $N = N_1 \times N_2$, множители которого удовлетворяют следующим условиям*:

1) $N_1 \in \Im$;
2) $\pi(N_2) \cap \pi(\Im) = \varnothing$;
3) $N_2 \subseteq \Phi(G, A)$.

Доказательство. Пусть $D = N \cap \Phi(G, A)$, $\pi = \pi(\Im)$. По теореме 3.1 подгруппа N представима в виде $N = N_1 \times N_2$, где N_1 – холловская π-подгруппа из N. Так как $N_2 \subseteq \Phi(G, A)$, то $N / DN_1 / D_1 \in \Im$, где $D_1 = N_1 \cap \Phi(G, A)$. Пусть $p \in \pi$. Так как $N_1 / D_1 \in \Im$, то, используя лемму 2.3 и лемму 4.5 из [2], получаем, что

$$(N_1 / D_1) / F_p(N_1 / D_1) =$$
$$= N_1 / D_1 / F_p(N_1) / D_1 N_1 / F_p(N_1) \in f(p).$$

Так как последнее справедливо для любого $p \in \pi(N_1)$, то по лемме 4.5 из [2] подгруппа N_1 входит в $\Im$. Теорема доказана.

***Следствие* 3.2.1.** *Пусть группа G имеет группу операторов A, такую, что $(|G|,|A|) = 1$, $\Im$ – локальная формация, содержащая все нильпотентные группы. Если N – субнормальная подгруппа группы G и $N / N \cap \Phi(G, A) \in \Im$, то $N \in \Im$.*

***Теорема* 3.3.** $C_G(\widetilde{F}(G, A)) \subseteq F(G)$ *для любой группы G.*

Доказательство. Положим $H = \widetilde{F}(G, A)$, $C = C_G(H)$, $F = F(G)$. Если $\Phi(G, A) \neq 1$, то рассматриваем $G / \Phi(G, A)$, для которой теорема верна по индукции. Тогда

$C\Phi(G, A) / \Phi(G, A) \subseteq F / \Phi(G, A) = F(G / \Phi(G, A))$,

откуда $C \subseteq F$. Рассмотрим теперь случай $\Phi(G, A) = 1$. Ввиду того, что подгруппа Фиттига $F(G)$ совпадает с пересечением централизаторов в G всех главных факторов группы G, получаем, что $F \subseteq C$.

Предположим, что $C \neq F$ и рассмотрим такой главный фактор N / F группы G, что $N \subseteq C$. Так как $Soc(N)$ содержится в H, следовательно, он централизуется подгруппой N. Если $N \neq G$, то по индукции $N = F(N) = F(G)$, что невозможно. Пусть $N = G$, то есть, G / F – главный фактор группы G. По лемме 7.9 из [2] и лемме 2.2

$$G = LF, L \cap F = 1, F \subseteq H.$$

В рассматриваемом случае $G = C$. Поэтому $G = L \times F$. Так как $G / F \simeq L$, то L либо проста, либо есть прямое произведение изоморфных простых групп. Так как $F \neq G$, то L неабелева и, несложно заметить, $L = G'$. Значит, L является минимальной нормальной подгруппой группы G, то есть $L \subseteq H$. Но это невозможно, так как L неабелева и $G = C$. Теорема доказана.

***Теорема* 3.4.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная локальная формация и группа G имеет группу операторов A, такую, что $(|G|, |A|) = 1$. Если H – $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G и $H / H \cap \Phi(G, A) \in \mathfrak{F}$, то H представима в виде прямого произведения $H = H_1 \times H_2$, множители которого удовлетворяют следующим условиям*:

1) $H_1 \in \mathfrak{F}$;

2) $\pi(H_2) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \varnothing$;

3) $H_2 \subseteq \Phi(G, A)$.

Доказательство. Так как подгруппа H $\mathfrak{F}$-достижима в G, то она, очевидно, G_π-достижима в G, где $\pi = \pi(\mathfrak{F})$. Ввиду леммы 2.1 подгруппа $H\Phi(G, A) / \Phi(G, A)$ G_π-достижима в группе $G / \Phi(G, A)$. Значит, на основании работы [7] имеем, что

$$H\Phi(G, A) / \Phi(G, A) \subseteq O_\pi(G / \Phi(G, A)).$$

Пусть $O_\pi(G / \Phi(G, A)) = K / \Phi(G, A)$. По теореме 3.2 подгруппа K представима в виде $K = K_1 \times K_2$, где K_1 – π-группа, $\pi(K_2) \cap \pi = \varnothing$, $K_2 \subseteq \Phi(G, A)$. Пусть H_1 – холловская π-подгруппа группы H, H_2 – холловская π'-подгруппа группы H. Очевидно, $H_1 \subseteq K_1$, $H_2 \subseteq K_2$. Поэтому $H = H_1 \times H_2$, причем, H_1 – π-группа, $\pi(H_2) \cap \pi = \varnothing$, $H_2 \subseteq \Phi(G, A)$.

Покажем, что $H_1 \in \mathfrak{F}$. Предположим, что это неверно и группа G является контрпримером минимального порядка. Тогда в G найдется F-достижимая подгруппа T, такая, что из $T / T \cap \Phi(G, A) \in \mathfrak{F}$ следует равенство $T = T_1 \times T_2$, где T_1 – π-группа, $\pi(T_2) \cap \pi = \varnothing$, $T_2 \subseteq \Phi(G, A)$, но подгруппа T_1 не принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Среди всех таких подгрупп выберем подгруппу H, имеющую в G наименьший индекс. Очевидно, что $H_1 \neq 1$. Поэтому $O_\pi(G) \neq 1$.

Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G. Так как

$$H\Phi(G, A)N / \Phi(G, A)N \simeq$$
$$\simeq H\Phi(G, A) / H\Phi(G, A) \cap \Phi(G, A)N,$$

то $H\Phi(G, A)N / \Phi(G, A)N \in \mathfrak{F}$. С другой стороны,

$$H\Phi(G, A)N / \Phi(G, A)N \simeq HN / HN \cap \Phi(G, A)N.$$

Поэтому $HN / HN \cap \Phi(G, A)N \in \mathfrak{F}$.

Так как $\Phi(G, A)N / N \subseteq \Phi(G / N, A)$, то

$$(HN / N) / (HN / N) \cap \Phi(G / N, A) \in \mathfrak{F}.$$

Кроме того, на основании леммы 2.1 подгруппа HN / N $\mathfrak{F}$-достижима в группе G / N. Теперь ввиду выбора группы G имеем $H_1 N / N \in \mathfrak{F}$. Если L – минимальная нормальная подгруппа группы G, отличная от N, то аналогично доказывается, что $H_1 L / L \in \mathfrak{F}$. Отсюда следует, что

$$H_1 / L \cap N \simeq H_1 \in \mathfrak{F}.$$

Пришли к противоречию.

Итак, N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G. Из

$$N \subseteq \Phi(G, A) \cap O_\pi(G)$$

следует, что N – абелева p-группа для некоторого $p \in \pi(\mathfrak{F})$. Кроме того, $H_2 = 1$, $H = H_1$ и $HN / N \in \mathfrak{F}$. Если N не содержится в H, то $|G : HN| < |G : H|$. Кроме того,

$$HN / HN \cap \Phi(G, A) \in \mathfrak{F}.$$

Значит, ввиду выбора подгруппы H имеем, что $HN \in \mathfrak{F}$. Так как формация $\mathfrak{F}$ является наследственной, то $H \in \mathfrak{F}$. Снова пришли к противоречию. Значит, в дальнейшем полагаем, что $N \subseteq H$.

Предположим, что H – собственная подгруппа группы $HO_p(G)$. Ввиду леммы 2.1 подгруппа H $\mathfrak{F}$-достижима в группе $HO_p(G)$. Поэтому существует такая цепь

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \ldots \subseteq H_n = HO_p(G),$$

что для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ выполняется одно из условий: 1) подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i; 2) $\mathfrak{F}$-корадикал подгруппы H_i содержится в H_{i-1}.

Пусть $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, f – максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Если подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i, то, очевидно, $H_{i-1}^{f(p)}$ – нормальная подгруппа группы H_i. По теореме 4.7 из [2] формация $f(p)$ является наследственной. Поэтому $H_{i-1}^{f(p)} \subseteq H_i^{f(p)}$. Значит, подгруппа $H_{i-1}^{f(p)}$ нормальна в группе $H_i^{f(p)}$.

Пусть теперь $H_i^{\mathfrak{F}} \subseteq H_{i-1}$. Так как

$$H_i = H_{i-1}(O_p(G) \cap H_i),$$

то

$$H_i / (H_{i-1})^{f(p)}(O_p(G) \cap H_i) \simeq$$
$$\simeq H_{i-1} / (H_{i-1})^{f(p)}(O_p(G) \cap H_{i-1}).$$

Поэтому $(H_i)^{f(p)} \subseteq (H_{i-1})^{f(p)}(O_p(G) \cap H_i)$.

Так как $H_{i-1}^{f(p)} \subseteq H_i^{f(p)}$, то

$$(H_i)^{f(p)}(O_p(G) \cap H_i) = (H_{i-1})^{f(p)}(O_p(G) \cap H_i). \tag{3.1}$$

По лемме 4.5 из [2] для любого $j \in \{0,1,2,...,n\}$ имеем

$$(H_j)^{f(p)} / (H_j)^{\mathfrak{F}} \subseteq O_{p'p}(H_j / (H_j)^{\mathfrak{F}}).$$

Так как экран f является внутренним максимальным, то на основании теоремы 3.3 из [2] $f(p) = N_p f(p)$. Отсюда следует, что

$$(H_j)^{f(p)} / (H_j)^{\mathfrak{F}} \subseteq O_{p'}(H_j / (H_j)^{\mathfrak{F}}).$$

Так как $H_j O_j(G) / O_p(G) \in \mathfrak{F}$, то

$$(H_j)^{\mathfrak{F}} \subseteq H_j \cap O_p(G).$$

Таким образом,

$$(H_j)^{f(p)} = (H_j)^{f(p)}_{p'} (H_j)^{\mathfrak{F}},$$

где $(H_j)^{f(p)}_{p'}$ – холловская p'-подгруппа группы $(H_j)^{f(p)}$. Теперь из равенства (3.1) следует, что холловская p'-подгруппа $(H_{i-1})^{f(p)}_{p'}$ группы $(H_{i-1})^{f(p)}$ является холловской p'-подгруппой группы $(H_i)^{f(p)}$. Значит,

$$(H_i)^{f(p)} = (H_{i-1})^{f(p)}_{p'} (H_i)^{\mathfrak{F}}.$$

Так как $(H_i)^{\mathfrak{F}} \subseteq H_{i-1}$, то $(H_i)^{f(p)} \subseteq H_{i-1}$. Итак,

$$(H_{i-1})^{f(p)} \subseteq (H_i)^{f(p)} \subseteq H_i.$$

Отсюда следует, что подгруппа $(H_{i-1})^{f(p)}$ нормальна в группе $(H_i)^{f(p)}$.

Итак, подгруппа $H^{f(p)}$ субнормальна в группе $HO_p(G)$. Тогда подгруппа

$$(H / N)^{f(p)} = H^{f(p)} N / N$$

является субнормальной подгруппой группы $(H / N) O_p(G / N)$. Так как $H / N \in \mathfrak{F}$, то

$$(H / N)^{f(p)} \subseteq O_{p'}(H / N).$$

Из субнормальности $(H / N)^{f(p)}$ в $HO_p(G) / N$ следует, что

$$(H / N)^{f(p)} \subseteq O_{p'}(HO_p(G) / N).$$

Значит,

$$(H / N)^{f(p)} O_p(G / N) \subseteq O_{p'p}(HO_p(G) / N).$$

Так как

$$HO_p(G) / H^{f(p)} O_p(G) \simeq$$
$$\simeq H / H \cap H^{f(p)} O_p(G) \in f(p),$$

то

$$(HO_p(G) / N) / O_{p'p}(HO_p(G) / N) \in f(p).$$

Используя теорему 4.1 из [2], получаем, что все главные факторы группы $HO_p(G) / N$, содержащиеся в $O_p(G) / N$, являются $\mathfrak{F}$-центральными. Поэтому из $HO_p(G) / O_p(G) \in \mathfrak{F}$ следует, что $HO_p(G) / N \in \mathfrak{F}$.

Очевидно, подгруппа $HO_p(G)$ $\mathfrak{F}$-достижима в группе G. Так как

$$| G : HO_p(G) | < | G : H |,$$

то ввиду выбора подгруппы H имеем, что $HO_p(G) \in \mathfrak{F}$. Из наследственности формации $\mathfrak{F}$ следует, что $H \in \mathfrak{F}$. Пришли к противоречию.

Итак, $O_p(G) \subseteq H$. Пусть ϕ – естественный гомоморфизм группы G на группу $G / \Phi(G, A)$. Отметим, что так как N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, то $\Phi(G, A) \subseteq O_p(G)$. Пусть $S = \phi^{-1}(O_p(G^{\phi}))$ – полный прообраз подгруппы $O_p(G^{\phi})$. На основании теоремы 3.2 подгруппа S представима в виде $S = S_1 \Phi(G, A)$, где S_1 – холловская p'-подгруппа группы S. Теперь из того, что N – единственная минимальная нормальная подгруппа, имеем $O_p(G^{\phi}) = 1$. Таким образом, все абелевы минимальные нормальные подгруппы группы G^{ϕ} являются p-группами.

Пусть K – неабелева минимальная нормальная подгруппа группы G^{ϕ}. Предположим, что K не принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Тогда $K = K^{\mathfrak{F}}$. Так как подгруппа H^{ϕ} $\mathfrak{F}$-достижима в G^{ϕ}, то из работы [8] $K \subseteq N_{G^{\phi}}(H)$. Значит, $K \cap H^{\phi}$ – нормальная подгруппа группы K и поэтому $(K \cap H^{\phi})^{\mathfrak{F}} = K \cap H^{\phi}$. Так как $\mathfrak{F}$ – наследственная формация, то $(K \cap H^{\phi})^{\mathfrak{F}} \subseteq (H^{\phi})^{\mathfrak{F}}$. Теперь из $H^{\phi} \in \mathfrak{F}$ следует, что $K \cap H^{\phi} = 1$. Значит, $KH^{\phi} = K \times H^{\phi}$.

Пусть теперь $K \in \mathfrak{F}$. Предположим, что K не содержится в H^{ϕ}. Так как подгруппа H^{ϕ} $\mathfrak{F}$-достижима в $H^{\phi}K$, то существует такая цепь

$$H^{\phi} = H_0 \subset H_1 \subset ... \subset H_s = H^{\phi}K,$$

что для каждого $i = 1, 2, ..., s$ выполняется одно из условий: 1) подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i; 2) $\mathfrak{F}$-корадикал подгруппы H_i содержится в H_{i-1}. В частности, либо подгруппа H^{ϕ} нормальна в группе H_1, либо $(H_1)^{\mathfrak{F}} \subseteq H^{\phi}$.

Пусть $(H_1)^{\mathfrak{F}} \subseteq H^{\phi}$. Так как $H^{\phi}K / K \in F$, то $(H^{\phi}K)^{\mathfrak{F}} \subseteq K$. Из наследственности формации $\mathfrak{F}$ имеем, что $(H_1)^{\mathfrak{F}} \subseteq K$. Так как подгруппа H_1 $\mathfrak{F}$-достижима в $H^{\phi}K$, то ввиду леммы 2.1 $(H_1)^{\mathfrak{F}}$ – субнормальная подгруппа группы $H^{\phi}K$. Очевидно, подгруппа K представима в виде $K = K_1 \times ... \times K_n$, где K_i – изоморфные простые группы. Так как подгруппа K неабелева, то $(H_1)^{\mathfrak{F}}$ – произведение некоторых подгрупп K_i для i из $\{1, 2, ..., n\}$. Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что

$$(H_1)^{\mathfrak{F}} = K_1 \times ... \times K_m,$$

где $k < m$.

Пусть L – минимальная нормальная подгруппа группы H^{ϕ}, содержащаяся в $(H_1)^{\mathfrak{I}}$. Так как подгруппа L неабелева, то $K = L \times C_K(L)$. Отсюда, в частности, следует, что L – минимальная нормальная подгруппа группы $H^{\phi}K$. Так как $L \subseteq H^{\phi}$, то

$$H^{\phi}K = H^{\phi}(LC_K(L)) = H^{\phi}C_K(L) = H^{\phi}C_{H^{\phi}K}(L).$$

Поэтому

$$H^{\phi}K / C_{H^{\phi}K}(L) = H^{\phi}C_{H^{\phi}K}(L) / C_{H^{\phi}K}(L) \simeq$$
$$\simeq H^{\phi} / H^{\phi} \cap C_{H^{\phi}K}(L) = H^{\phi} / C_{H^{\phi}}(L).$$

Так как $H^{\phi} \in \mathfrak{I}$, то $H^{\phi} / C_{H^{\phi}}(L) \in f(L)$. Но тогда $H^{\phi}K / C_{H^{\phi}K}(L) \in f(L)$, то есть, L – $\mathfrak{I}$-центральный главный фактор группы $H^{\phi}K$. Так как формация $f(L)$ наследственна, то L – F-центральный главный фактор группы H_1. Отсюда из строения подгруппы $(H_1)^{\mathfrak{I}}$ следует, что все H_1-главные факторы группы $(H_1)^{\mathfrak{I}}$ $\mathfrak{I}$-центральны в H_1. Значит, подгруппа H_1 принадлежит формации $\mathfrak{I}$. Так как подгруппа H_1 F-достижима в H_1K, а подгруппа $H_1K = H^{\phi}K$ $\mathfrak{I}$-достижима в G^{ϕ}, то H_1 – $\mathfrak{I}$-достижимая подгруппа группы G^{ϕ}. Пусть $\phi^{-1}(H_1)$ – полный прообраз подгруппы H_1. Тогда $\phi^{-1}(H_1)$ – $\mathfrak{I}$-достижимая подгруппа группы G, $\phi^{-1}(H_1) / \Phi(G,A) \in \mathfrak{I}$ и $|G : \phi^{-1}(H_1)| < |G : H|$. Ввиду выбора подгруппы H имеем, что $\phi^{-1}(H_1) \in \mathfrak{I}$. Так как формация $\mathfrak{I}$ наследственна, то $H \in \mathfrak{I}$. Пришли к противоречию.

Пусть теперь подгруппа H^{ϕ} нормальна в H. Не нарушая общности рассуждений, можем считать, что H_1 / H^{ϕ} – простая группа. Предположим, что $(H_1)^{\mathfrak{I}} H^{\phi}$. Тогда

$$H_1 = H^{\phi}(H_1)^{\mathfrak{I}} = H^{\phi}(K_1 \times ... \times K_m).$$

Так как

$$H_1 / H^{\phi} \simeq K_1 \times ... \times K_m / K_1 \times ... \times K_m \cap H^{\phi},$$

то из $K \in \mathfrak{I}$ следует, что $(H_1)^{\mathfrak{I}} \subseteq H^{\phi}$. Пришли к противоречию с предположением.

Значит, $(H_1)^{\mathfrak{I}} \subseteq H^{\phi}$. Как показано выше, это приводит к противоречию с выбором подгруппы H.

Итак, если K – минимальная нормальная подгруппа группы G^{ϕ}, то либо $K = K^{\phi}$ и $[K, H^{\phi}] = 1$, либо $K \in \mathfrak{I}$ и $K \subseteq H^{\phi}$. Если $K = K^{\mathfrak{I}}$, то, очевидно, $O_p(H^{\phi}) \subseteq C_{G^{\phi}}(K)$. Пусть $K \in \mathfrak{I}$. Тогда $K \subseteq H^{\phi}$. Так как все минимальные нормальные подгруппы группы G являются либо p-группами, либо pd-группами, то из $K \subseteq H^{\phi}$ снова получаем, что $O_p(H^{\phi}) \subseteq C_{G^{\phi}}(K)$. Таким образом,

$$O_p(H^{\phi}) \subseteq C_{G^{\phi}}(Soc(G^{\phi})).$$

Так как $\Phi(G^{\phi}, A) = 1$, то $Soc(G^{\phi}) = \widetilde{F}(G^{\phi}, A)$. По теореме 3.3

$$O_p(H^{\phi}) \subseteq F(G^{\phi}) = O_p(H^{\phi}).$$

Значит, $O_p(H^{\phi}) = 1$.

Так как $H^{\phi} \in \mathfrak{I}$, то ввиду леммы 4.5 [2] из условия $f(p) = N_p f(p)$ следует, что

$$H^{\phi} / O_p(H^{\phi}) \in f(p).$$

Так как $O_p(H^{\phi}) = 1$, то $H^{\phi} = H / \Phi(G, A) \in f(p)$. Теперь из $\Phi(G, A) \subseteq O_p(G)$ и $f(p) = N_p f(p)$ следует, что $H \in f(p)$. Так как экран f является внутренним, то $H^{\phi} \in \mathfrak{I}$. Снова пришли к противоречию. Теорема доказана.

***Следствие* 3.4.1.** *Пусть* $\mathfrak{I}$ *– наследственная локальная формация, содержащая все нильпотентные группы, и группа* G *имеет группу операторов* A*, такую, что* $(|G|, |A|) = 1$*. Если* N *–* $\mathfrak{I}$*-достижимая подгруппа группы* G *и* $N / N \cap \Phi(G, A) \in \mathfrak{I}$*, то* $N \in \mathfrak{I}$*.*

Так как $\mathfrak{I}$-субнормальные и субнормальные подгруппы являются $\mathfrak{I}$-достижимыми, то в качестве следствия из теоремы 3.4 можно получить аналогичные утверждения для этих подгрупп.

***Теорема* 3.5.** *Пусть* $\mathfrak{I}$ *– наследственная локальная формация. Если* H *–* $\mathfrak{I}$*-достижимая подгруппа группы* G *и* $H / H \cap D^{\mathfrak{I}}(G, A) \in \mathfrak{I}$*, то* H *представима в виде прямого произведения* $H = H_1 \times H_2$*, множители которого удовлетворяют следующим условиям:*

1) $H_1 \in \mathfrak{I}$;
2) $\pi(H_2) \cap \pi(\mathfrak{I}) = \varnothing$;
3) $H_2 \subseteq \Phi(G, A)$.

Доказательство. Так как

$$H / H \cap D^{\mathfrak{I}}(G, A) \in \mathfrak{I},$$

то $HD^{\mathfrak{I}}(G, A) / D^{\mathfrak{I}}(G, A) \in \mathfrak{I}$. Ввиду теоремы 3.1 из [9] имеем, что

$$D^{\mathfrak{I}}(G, A) / \Phi(G, A) = Z_{\mathfrak{I}}(G / \Phi(G, A)).$$

Пусть K / S – G-главный фактор группы $D^{\mathfrak{I}}(G, A) / \Phi(G, A)$. Тогда он $\mathfrak{I}$-централен в G и поэтому $G / C_G(K / S) \in f(p)$ для любого $p \in \pi(K / S)$ и любого локального экрана f формации $\mathfrak{I}$. Если f – максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{I}$, то согласно теореме 4.7 из [2] формация $f(p)$ наследственна. Значит,

$$HD^{\mathfrak{I}}(G, A) / C_{HD^{\mathfrak{I}}(G, A)}(K / S) \in f(p).$$

Отсюда следует, что все главные факторы группы $HD^{\mathfrak{I}}(G, A) / \Phi(G, A)$ $\mathfrak{I}$-центральны.

Поэтому $HD^{\mathfrak{I}}(G,A)/\Phi(G,A) \in \mathfrak{I}$. По лемме 2.1 $HD^{\mathfrak{I}}(G,A)$ – $\mathfrak{I}$-достижимая подгруппа группы G. Тогда на основании теоремы 3.4 подгруппа $HD^{\mathfrak{I}}(G,A)$ представима в виде $HD^{\mathfrak{I}}(G,A) = T_1 \times T_2$, где

$$T_1 \in \mathfrak{I},\ \pi(T_2) \cap \pi(\mathfrak{I}) = \varnothing,$$
$$T_2 \subseteq \Phi(G,A).$$

Так как формация $\mathfrak{I}$ наследственна, то и подгруппа H представима в виде $H = H_1 \times H_2$, где

$$H_1 \in \mathfrak{I},\ \pi(H_2) \cap \pi(\mathfrak{I}) = \varnothing,\ H_2 \subseteq \Phi(G,A).$$

***Следствие* 3.5.1.** *Пусть $\mathfrak{I}$ – наследственная локальная формация, содержащая все нильпотентные группы. Если N – $\mathfrak{I}$-достижимая подгруппа группы G и $N/N \cap D^{\mathfrak{I}}(G,A) \in \mathfrak{I}$, то $N \in \mathfrak{I}$.*

Заключение

В работе описано влияние обобщенной подгруппы Фраттини на строение $\mathfrak{I}$-достижимых подгрупп в группах с операторами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Frattini*, *G.* Intorno alla generasione dei gruppi di operazioni / G. Frattini // Atti Acad. Dei Lincei. – 1885. – Vol. 1. – P. 281–285.

2. *Шеметков*, *Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков – М.: Наука, 1978. – 272 с.

3. *Селькин*, *М.В.* Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп / М.В. Селькин. – Мн.: Беларуская навука, 1997. – 144 с.

4. *Ballester-Bolinches*, *A.* On $\mathfrak{I}$-subnormal subgroups and Frattini-like subgroups of a finite group / A. Ballester-Bolinches, M.D. Perez-Ramos // Glasgow Math. J. – 1994. – Vol. 36. – P. 241–247.

5. *Beidleman*, *J.* On Frattini-like subgroups / J. Beidleman, H. Smith // Glasgow Math. J. – 1993. – Vol. 35. – P. 95–98.

6. *Doerk*, *K.* Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

7. *Kegel*, *O.* Untergruppenverbände endlicher Gruppen, die den Subnormslteilerverband echt enthaltent / O.Kegel // Arch. Math. – 1978. – Vol. 30. – № 2. – P. 225–228.

8. *Авдашкова*, *Л.П.* О нормализаторах $\mathfrak{I}$-достижимых подгрупп / Л.П. Авдашкова, С.Ф. Каморников // Весцi АН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. – 1996. – № 1. – С. 33–35.

9. *Бородич*, *Е.Н.* О пересечении подгрупп в группах с операторами / Е.Н. Бородич, Р.В. Бородич, М.В. Селькин // Вестник БГУ. Серия 1. – 2012. – С. 54–62.

Поступила в редакцию 20.02.15.